Κριτήριο Αξιολόγησης Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

Α1) Αν για κάθε $0<\alpha\neq 1$, τότε για κάθε $\theta_1, \theta_2>0$, να δείξετε ότι:

$$\log_a(\theta_1 \theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$$

(Μ11)

Α2)Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος

α) Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2 \end{cases}$ έχει δύο λύσεις , τότε D=0

β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_1 x_2 \in \Delta$

με $x_1<x_2$, ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$

γ) $\eta\mu_x=\eta\mu_\theta \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\theta$ ή $x=2\kappa\pi-\theta$, $\kappa \in Z$

δ) Αν για ένα πολυώνυμο P(x) ισχύει P(ρ) ≠0 τότε x-ρ δεν είναι παράγοντας του P(x)

ε) Αν $0<\alpha<1$ τότε ισχύει $\alpha^{x1}<\alpha^{x2} \Leftrightarrow x_1<x_2$, για κάθε $x_1, x_2 \in R$

(Μ2x5=10)

Α3) Δίνεται η πρόταση:

«Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι διαιρέτης του $\alpha_o\neq 0$ τότε υποχρεωτικά ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha_\nu x^\nu+\ldots\alpha_1 x+\alpha_o=0$, με ακέραιους συντελεστές.»

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως Αληθή(Α) ή Ψευδή(Ψ) (Μ1)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μ3)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{4})+\sigma\upsilon\nu(x-\frac{\pi}{4}), x \in [0,2\pi]$

Β1) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$ (Μ8)

Β2) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις τιμές του x που παρουσιάζονται τα ακρότατα. (Μ8)

Β3) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\sqrt{6}\eta\mu x$ (Μ9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda x^3+(\mu-1)x^2+2x+3$ με ακέραιους συντελεστές. Το πολυώνυμο έχει μια αρνητική ακέραια ρίζα ρ, με $\rho\neq-3$ ενώ όταν διαιρείται με x-1 αφήνει υπόλοιπο 6.

Γ1) Να δείξετε ότι λ=μ=1 και

να λύσετε την εξίσωση P(x)=0 (M4+4=8)

Γ2)Να δείξετε ότι η συνάρτηση P(x) είναι γνησίως αύξουσα και να συγκρίνετε τους αριθμούς $P(\eta\mu_2)$ και $P(\eta\mu_3)$ (Μ 5+4=9)

Γ3)Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση Cp βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x και να βρείτε το πρόσιμο του γινομένου $P(\ln e^{-2}).P(\eta\mu\frac{51\pi}{6}).P(e)$ (M4+4=8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{3^x-9}{1-3^{x+2}}$

Δ1) Να δείξετε ότι έχει πεδίο ορισμού Α=(-2,2) (Μ10)

Δ2) Να λύσετε την ανίσωση f(x) +ln3>0 (M5)

Δ3) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο Α (M5)

Δ4) Να δείξετε ότι τα τόξα $\frac{2\pi}{7}+\theta$ και $\frac{5\pi}{7}-\theta$ είναι παραπληρωματικά και ισχύει

$f(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)+f(\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{7}-\theta))=0$ (M5)

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Απόδειξη , Σχολικό βιβλίο σελ 175

Α2) α) Σωστή, β) Λάθος, γ) Λάθος, δ) Σωστή, ε) Λάθος

Α3) Ψευδής , γιατί π.χ

Για την εξίσωση $x^3+1=0$,ο ακέραιος είναι 1 είναι διαιρέτης του σταθερού όρου 1 όμως δεν είναι λύση της εξίσωσης $1^3+1\neq 0$

ΘΕΜΑ Β

Β1) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{4}) + \sigma\upsilon\nu(x-\frac{\pi}{4})$=συν x συν$\frac{\pi}{4}$-$\cancel{\eta\mu x\ \eta\mu}\frac{\pi}{4}$+ συν x συν$\frac{\pi}{4} + \cancel{\eta\mu x \eta\mu}\frac{\pi}{4} =$

2 συνx.συν$\frac{\pi}{4}$=$\cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$συνx=$\sqrt{2}.\sigma\upsilon\nu x$

Β2) Για κάθε x$\in [0,2\pi]$, έχουμε

-1≤συνχ≤1 ⇔-$\sqrt{2}$≤$\sqrt{2}$συνx≤ $\sqrt{2}$⇔$-\sqrt{2}$≤f(x) ≤$\sqrt{2}$

Άρα η f έχει μέγιστο το $\sqrt{2}$, όταν

συνx=1 ⇔ x=0 ή x=2π και έχει ελάχιστο το -$\sqrt{2}$, όταν συνx=-1 ⇔ x=π

Β3) f(x)=$\sqrt{6}$ ημx$\overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow}$$\cancel{\sqrt{2}}$συνx=$\overset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{6}}}$ημx ⇔συνx=$\sqrt{3}$ημx

$\overset{\eta\mu x\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$=$\sqrt{3}$⇔συνφx=$\sqrt{3}$⇔συνφχ=σφ$\frac{\pi}{6}$⇔x=κπ+$\frac{\pi}{6}$, κ$\in Z$

Όμως έχουμε 0≤x≤2π ⇔0≤ κπ+$\frac{\pi}{6}$≤2π⇔-$\frac{\pi}{6}$≤ κπ≤ 2π-$\frac{\pi}{6}$⇔-$\frac{\pi}{6}$≤ κπ≤ 11$\frac{\pi}{6}$$\overset{(:\pi)}{\Leftrightarrow}$-$\frac{1}{6}$≤κ≤$\frac{11}{6}$

Αφού κ$\in Z$, θα είναι κ=0, άρα x=$\frac{\pi}{6}$

ή κ=1, άρα x=$\pi + \frac{\pi}{6}$=$\frac{7\pi}{6}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του P(x)είναι ±1 και ±3, αφού ρ≠-3 το P(x) θα έχει ρίζα το -1 οπότε έχουμε

$P(-1)=0 \Leftrightarrow \lambda.(-1)^3+(\mu-1)(-1)^2+2.(-1)+3=0 \Leftrightarrow -\lambda+\mu\cancel{-1}\cancel{-2}\cancel{+3}=0 \Leftrightarrow \mu=\lambda$

Επίσης πρέπει $P(1)=6 \Leftrightarrow \lambda+\mu-1+2+3=6 \Leftrightarrow \lambda+\mu+4=6 \Leftrightarrow 2\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=1$ άρα και μ=1

Άρα $P(x)=x^3+2x+3$

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3+2x+3=0 \Leftrightarrow (x+1).(x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow$

1	0	2	3	-1
$\downarrow$	-1	1	-3	
1	-1	3	0	

$x+1=0$ ή $x^2-x+3=0$ αδύνατη

$x=-1$ $\Delta=1-12=-11$

Γ2) Έστω $x_1,x_2 \in R$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3>x_2^3$

και $x_1,x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \Leftrightarrow 2x_1+3<2x_2+3$

άρα $x_1^3+2x_1+3 < x_2^3+2x_2+3 \Leftrightarrow P(x_1)<P(x_2)$

άρα P(x) $\uparrow$, στο R

Είναι $\frac{\pi}{2}<2<3<\frac{3\pi}{2}$ και ημx $\downarrow$ στο$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

Άρα $ημ2>ημ3 \overset{P\uparrow}{\Leftrightarrow} P(ημ2)>P(ημ3)$

Γ3) Πρέπει $P(x)>0 \Leftrightarrow (x+1).(x^2-x+3)>0$

Όμως $x^2-x+3>0$, $\forall x\in R$, αφού Δ=-11

Άρα πρέπει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ δηλ. $P(x)>0$, $\forall x\in(-1,+\infty)$

Οπότε η Cp βρίσκεται πάνω από τον x'x όταν $x\in(-1,+\infty)$

Είναι $\ln e^{-2}=-2\ln e=-2$, άρα $P(\ln e^{-2})=P(-2)<0$

$ημ\frac{51\pi}{6}>-1$,άρα $P(ημ\frac{51\pi}{6})>0$

και e>-1, άραP(e)>0

Οπότε $P(\ln e^{-2}).P(ημ\frac{51\pi}{6}).P(e)<0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $f(x)=\ln\frac{3^x-9}{1-3^{x+2}}$

Πρέπει $1-3^{x+2}\neq 0 \Leftrightarrow 3^{x+2}\neq 1 \Leftrightarrow 3^{x+2}\neq 3^0 \Leftrightarrow x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$

Και $\frac{3^x-9}{1-3^{x+2}}>0 \Leftrightarrow (3^x-9).(1-3^{x+2})>0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
3^x-9	-	-	0 +
$1-3^{x+2}$	+	0 -	-
Γιν.	-	0 +	0 -

$3^x-9>0 \Leftrightarrow 3^x>9 \Leftrightarrow 3^x>3^2 \Leftrightarrow x>2$

$1-3^{x+2}>0 \Leftrightarrow 3^{x+2}<1 \Leftrightarrow x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$

Άρα πρέπει $-2<x<2$, οπότε $A=(-2,2)$

Δ2) $f(x)+\ln 3>0 \Leftrightarrow f(x)>-x\ln 3 \overset{-2<x<2}{\Leftrightarrow} \ln\frac{3^x-9}{1-3^{x+2}}>\ln 3^{-x} \Leftrightarrow \frac{3^x-9}{1-3^{x+2}}>3^x \Leftrightarrow \frac{3^x-9}{1-3^{x+2}}>\frac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^x(3^x-9)<1-3^{x+2}$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-9.3^x<1-3^x\,.\,3^2 \Leftrightarrow 3^{2x}\cancel{-9.3^x}<1\cancel{-9.3^x} \Leftrightarrow 3^{2x}<1 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0$

Άρα $-2<x<0$

Δ3) $\forall x\in(-2,2)$ και $-x\in(-2,2)$

Είναι επίσης $f(x)=\ln\frac{3^x-9}{1-9.3^x}$, άρα

$f(-x)=\ln\frac{3^{-x}-9}{1-9.3^{-x}}=\ln\frac{\frac{1}{3^x}-9}{1-\frac{9}{3^x}}=\ln\frac{\frac{1-9.3^x}{3^x}}{\frac{3^x-9}{3^x}}=\ln\frac{1-9.3^x}{3^x-9}=\ln\left(\frac{3^x-9}{1-9.3^x}\right)^{-1}=-\ln\left(\frac{3^x-9}{1-9.3^x}\right)=-f(x)$

Άρα f περιττή

Δ4) Είναι $\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)+\left(\frac{5\pi}{7}-\theta\right)=\frac{7\pi}{7}=\pi$, παραπληρωματικά

Άρα συν$\left(\frac{5\pi}{7}-\theta\right)=-$συν$\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)$, οπότε

f(συν$\left(\frac{5\pi}{7}-\theta\right)$)=f(-συν$\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)$)=-f(συν$\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)$), f περιττή.

Άρα f(συν$\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)$)+ f(συν$\left(\frac{5\pi}{7}-\theta\right)$)= f(συν$\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)$)-f(συν$\left(\frac{2\pi}{7}+\theta\right)$)=0

Επιμέλεια θεμάτων: Κοτρονοπούλου Έλενα