ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 45

Α.2 Σχολικό βιβλίο σελίδα 41

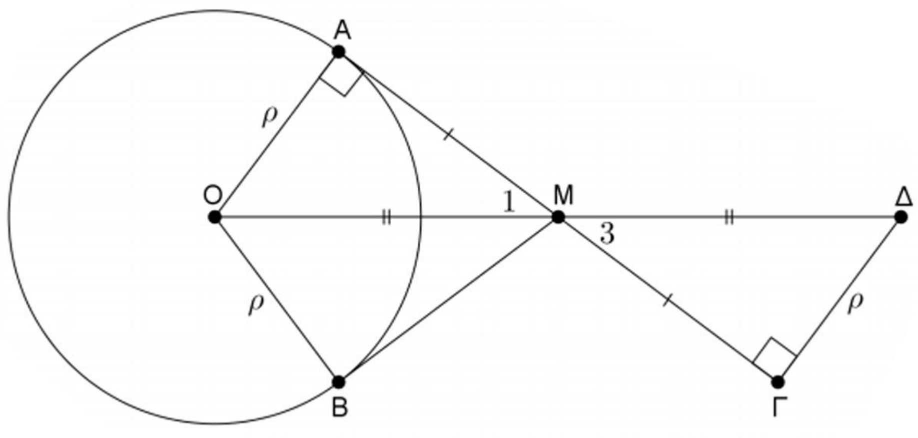
Α.3 α → Σωστό

β→Λάθος

γ→ Λάθος

δ→Σωστό

ΘΕΜΑ Β



α) Φέρνω την ακτίνα ΟΑ και συγκρίνω τα τρίγωνα ΜΓΔ και ΜΑΟ τα οποία έχουν :

ΜΓ = ΜΑ (από υπόθεση)

ΜΔ =ΜΟ (από υπόθεση)

$\widehat{M_1} = \widehat{M_3}$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία ίσες μια προς μια , άρα από Π-Γ-Π θα είναι ίσα , οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα . Δηλαδή θα έχω ΓΔ = ΟΑ = ρ, $\widehat{\Gamma} = \hat{A}$ (1) και Μ$\hat{\Delta}$Γ=Μ$\hat{O}$Α.

β) Η ΟΑ είναι ακτίνα στο σημείο επαφής άρα η $\hat{A}$=90^o και από την σχέση (1) $\widehat{\Gamma}$=90^o.Επομένος ΟΑ ⊥ ΑΓ και ΓΔ ⊥ ΑΓ, δηλαδή οι ΟΑ ,ΓΔ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία άρα μεταξύ τους παράλληλες, ΟΑ// ΓΔ.

<u>Θεμα Γ</u>

Η $\Gamma\widehat{K}\Delta$ είναι εσωτερική γωνία δύο τενμουσών του κύκλου και η $\hat{A}$ είναι εξωτερική.Οπότε,

$\Gamma\widehat{K}\Delta = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}+\overset{\frown}{BE}}{2}$ <=> 70^o = $\frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}+\overset{\frown}{BE}}{2}$ <=> $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ + $\overset{\frown}{BE}$ = 140^O (1)

$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}-\overset{\frown}{BE}}{2} <=> 30° = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}-\overset{\frown}{BE}}{2}$ <=> $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ – $\overset{\frown}{BE}$ = 60^O (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε :

2$\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ = 200^o <=> $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ = 100^O

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$BE + 100^{o} = 140^{o} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 140^{o} - 100 \Leftrightarrow BE = 40^{o}$

β) Στα τρίγωνα ΒΓΚ και ΔΕΚ έχουμε:

ΒΓ=ΕΔ(από υπόθεση)

$\Gamma\hat{B}K = \Delta\hat{E}K$(Εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$B\hat{\Gamma}K = E\hat{\Delta}K$(Εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

Επομένος από Γ-Π-Γ είναι ίσα, άρα και ΒΚ=ΚΕ.

Το τρίγωνο ΒΚΕ είναι ισοσκελές με $B\hat{K}E = \Gamma\hat{K}\Delta = 70^{o}$

Αρά, $K\hat{B}E + B\hat{K}E + B\hat{E}K = 180^{o} \Leftrightarrow K\hat{B}E = \frac{180^{\circ} - B\hat{K}E}{2} = 55^{o}$

$\Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2} = \frac{100^{\circ}}{2} = 50^{o}$.

Επομένος, $\Gamma\hat{B}E = K\hat{B}E + \Gamma\hat{B}\Delta = 55^{o} + 50^{o} = 105^{o}$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

α) Επειδή ΓΔ = ΒΓ (από υπόθεση) και ΑΓ = ΒΓ (από ισόπλευρο ΑΒΓ), έχουμε ΑΓ = ΓΔ, δηλαδή το ΑΓΔ είναι ισοσκελές. Οπότε,

Α$\widehat{\Gamma}$Δ= 180° - Α$\widehat{\Gamma}$Β = 180° – 60° = 120° (ως εξωτερική του τριγώνου ΑΒΓ)

Και $\hat{\Delta}$=Γ$\hat{A}$Δ=$\frac{180° - 120°}{2}$ = 30°

β) i. Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε ΚΛ // ΒΔ και ΚΛ // ΜΓ.

Το ΛΓ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ,οπότε ΛΓ//ΑΒ και ΛΓ//ΚΒ.Επίσης ΛΓ= $\frac{AB}{2}$(1)

Από τα παραπάνω το τετράπλευρο ΚΛΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.

ΚΛ = ΒΓ <=> ΚΛ = 2ΜΓ

Το ΚΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ,οπότε ΚΜ//ΑΓ.Επίσης ΚΜ = $\frac{A\Gamma}{2}$(2)

Μ$\widehat{K}$Λ = Κ$\widehat{M}$Β ως εντός εναλλάξ που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΛ και ΒΔ που τέμνονται από την ΚΜ.

$K\widehat{M}B = A\widehat{\Gamma}B = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά που σχιματίζονται από τις παράλληλες ΚΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΒΓ .
$K\widehat{\Lambda}\Gamma = \widehat{B} = 60^o$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΚΛΓΒ.

$M\widehat{K}\Lambda + K\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o < 180^o$

οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΜ και ΛΓ τέμνονται.

Στο τετράπλευρο ΚΛΓΜ έχουμε ΚΛ // ΜΓ και τις πλευρές ΚΜ και ΛΓ να τέμνονται,άρα το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο.

Επειδή ΑΒ=ΑΓ και από (1),(2) έχουμε ότι ΛΓ=ΚΜ,οπότε τελικά το ΚΛΜΓ ισοσκελές τραπέζιο με την μεγάλη βάση διπλάσια τις μικρής.

Β. ii)Στο ισοσκελες τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ΓΛ διχοτόμος της $A\widehat{\Gamma}\Delta$(διάμεσος σε ισοσκελές),οπότε

$A\widehat{\Gamma}\Lambda=\frac{A\widehat{\Gamma}\Delta}{2}$ <=> $A\widehat{\Gamma}\Lambda= 60^o$ $A\widehat{\Gamma}\Lambda + A\widehat{\Gamma}M+\Lambda\widehat{\Gamma}\Delta= 180^o$ <=> $A\widehat{\Gamma}M=180^o - 60^o -60^o =60^o$

Επίσης ΑΒ=ΒΓ <=> ΛΓ = ΜΓ, οπότε το τρίγωνο ΜΛΓ ισοσκελές. Επομένος στο ισοσκελές τρίγωνο ΛΓΜ, η ΓΝ διχοτόμος άρα και ύψος. ΚΜ//ΑΓ και ΚΜ//ΓΝ, ΓΝ⊥ $\mathit{\Lambda M}$,οπότε και ΚΜ⊥ $\mathit{M\Lambda}$ και Κ$\widehat{M}\mathit{\Gamma} = 90^{o}$.Άρα το ΚΜΛ ορθογώνιο.

Επιμέλεια: Κυριάκος Γιώργος