ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Να αποδείξετε ότι:
Για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 7)

A_2. Πότε μια συνάρτηση f είναι $1-1$;

(Μονάδες 4)

A_3. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 4)

A_4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.

(Μονάδες 2)

β. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

(Μονάδες 2)

γ. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 2)

δ. Κάθε συνάρτηση είναι πάντοτε συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 2)

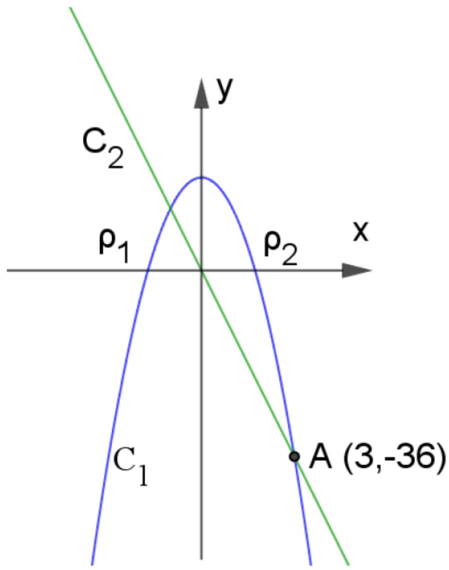
ε. Αν $f(x)\leq\frac{1}{x^2}$, $x\in(\alpha,+\infty)$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και f''.



Επίσης Ισχύει ότι $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$.

B₁. Να δείξετε ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f' και η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f''.

(Μονάδες 5)

B₂. Να δείξετε ότι $f(x) = -2x^3 + 18x\,,\, x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

B₃. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

(Μονάδες 6+3)

B₄. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και f''.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,5]$ και ισχύει $1 \le f'(x) \le 4$ για κάθε $x \in (-1,5)$.
Αν $f(5)=2$, να αποδείξετε ότι:

Γ₁. $-22 \le f(-1) \le -4$.

(Μονάδες 5)

Γ₂. Η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς μια φορά τον άξονα $x'x$ όταν $x \in (-1,5)$.

(Μονάδες 4)

Γ₃. Η συνάρτηση F αρχική της f έχει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[-1,5]$.

(Μονάδες 5)

Γ₄. **i.** Ορίζεται η αντίστροφη της f για κάθε $x \in [-1,5]$.

(Μονάδες 2)

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4+3f^{-1}(x)}{x^{2023}}$.

(Μονάδες 4)

Γ₅. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,5)$ με $x_1 \ne x_2$ τέτοια ώστε

$$\left(f'(x_1)\right)^3 \left(f'(x_2)\right)^2 = 72.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- $\int_0^1 [f(x)+f(t)]\,dt = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Δ₁. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

Αν $f(x) = e^x + 3x^2 + 2x$.

Δ₂. **i.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της παραγώγου της f τέμνει ακριβώς μια φορά τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 0)$.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα (ολικό) ακρότατο για $x = x_0$ και ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3+3)

Δ₃. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{x^2 - 1}{f'(x)}$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{x^2 - 1}{f'(x)}$.

Τι συμπεραίνετε για το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 1}{f'(x)}$;

(Μονάδες 1,5+1,5+1)

Δ₄. Αν ισχύει $\int_{g(1)}^{g(2)} f(x)dx = 0$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει μια τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη. (Μονάδες 5)

Επιμέλεια θεμάτων

Ξινός Κώστας Καρακώστα Νάσια

Κριμιθάς Θεόδωρος

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α₂. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1», όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Α₃. Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Α₄. α ⟶ Σ, β ⟶ Σ, γ ⟶ Λ, δ ⟶ Λ, ε ⟶ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β₁. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f' και η C_1 η γραφική παράσταση της f''. Τότε από την γραφική παράσταση C_1 της f'' ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (ρ_1, ρ_2), **άτοπο** ,

γιατί από τη γραφική παράσταση C_2 της f', προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Επομένως , η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f' και η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f''.

B₂. Η γραφική παράσταση της f'' είναι η C_2 , που είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(3,-36)$.

Επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι θα είναι της μορφής $y=\alpha x$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(3,-36)$ θα ισχύει $-36=3\alpha \Leftrightarrow \alpha=-12$.

Δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f''(x)=-12x$.

Έχουμε $f''(x)=-12x \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)'=\left(-6x^2\right)' \Leftrightarrow f'(x)=-6x^2+c_1$ και επειδή η f' διέρχεται από το σημείο $A(3,-36)$, έχουμε

$f'(3)=-36 \Leftrightarrow -6\cdot 3^2+c_1=-36_1 \Leftrightarrow -54+c_1=-36 \Leftrightarrow c_1=18$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-6x^2+18$.

$f'(x)=-6x^2+18 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)'=\left(-2x^3+18x\right)' \Leftrightarrow f(x)=-2x^3+18x+c_2$.

Ισχύει ότι $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=0$ επομένως είναι,

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{2}(-2x^3+18x+c_2)\,dx=0 \Leftrightarrow \left[-\frac{x^4}{2}+9x^2+c_2x\right]_{-2}^{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2^4}{2}+9\cdot 2^2+c_2 2-\left(-\frac{(-2)^4}{2}+9\cdot(-2)^2+c_2(-2)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$-8+36+2c_2-(-8+36-2c_2)=0 \Leftrightarrow -8+36+2c_2+8-36+2c_2=0 \Leftrightarrow$$

$$4c_2=0 \Leftrightarrow c_2=0 .$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=-2x^3+18x$.

B₃. Για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$ η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική).

Ισχύει ότι :

$f(-x)=-2(-x)^3+18(-x)=2x^3-18x=-(-2x^3+18x)=-f(x)$

δηλαδή η f είναι περιττή.

Είναι $f'(x)=-6x^2+18=-6(x^2-3)=-6(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	
			T.E		T.M		

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$, $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

Η f παρουσιάζει στο $x_2=\sqrt{3}$ τοπικό μέγιστο το,

$f(\sqrt{3})=-2(\sqrt{3})^3+18(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}+18\sqrt{3}=12\sqrt{3}$, $B(\sqrt{3},12\sqrt{3})$.

Η f παρουσιάζει στο $x_1=-\sqrt{3}$ τοπικό ελάχιστο το,

$f(-\sqrt{3})=-2(-\sqrt{3})^3+18(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}-18\sqrt{3}=-12\sqrt{3}$, $\Gamma(-\sqrt{3},-12\sqrt{3})$.

Είναι $f''(x)=-12x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	∪		∩
		Σ.Κ	

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η C_f έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))=(0,0)$.

Η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού επομένως η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+18x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3+18x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3)=-\infty$

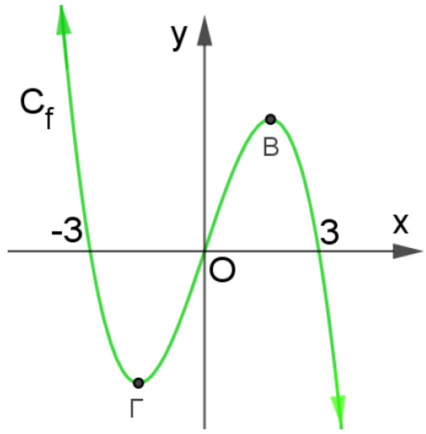
Για $x=0$ είναι $f(0)=0$, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,0)$.

Για $y=0$ είναι $-2x^3+18x=0 \Leftrightarrow -2x(x^2-9)=0 \Leftrightarrow -2x(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=-3$ ή $x=3$ δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(0,0)$, $(-3,0)$, $(3,0)$.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω σχηματίζουμε τον πινάκα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφικής παράσταση.

	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-12\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$12\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$



B₄. Είναι $f'(x) = -6x^2 + 18$ και

$f''(x) = -12x$

Έχουμε $f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow -6x^2 + 18 = -12x \Leftrightarrow -6x^2 + 12x + 18 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 3$.

Στο διάστημα $(-1,3)$ η C_1 είναι πάνω από την C_2 αρά $f'(x) > f''(x)$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_{-1}^{3} |f'(x) - f''(x)|\, dx = \int_{-1}^{3} \left(f'(x) - f''(x)\right) dx = \int_{-1}^{3} (-6x^2 + 18 - (-12x))\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-6x^2 + 12x + 18)\, dx = \left[-2x^3 + 6x^2 + 18x\right]_{-1}^{3}$$

$= -54 + 54 + 54 - (2 + 6 - 18) = 64$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,5]$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,5)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2 - f(-1)}{6}.$$

Είναι όμως $1 \le f'(x) \le 4$ για κάθε $x \in (-1,5)$ άρα θα είναι και $1 \le f'(\xi) \le 4$

επομένως $1 \le f'(\xi) \le 4 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{2 - f(-1)}{6} \le 4 \Leftrightarrow 6 \le 2 - f(-1) \le 24 \Leftrightarrow$

$4 \le -f(-1) \le 22 \Leftrightarrow -22 \le f(-1) \le -4$

Γ₂. Η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$ως παραγωγίσιμη και $-22\le f(-1)\le -4$ δηλαδή $f(-1)<0$ και $f(5)=2>0$ άρα $f(-1)\cdot f(5)<0$ επομένως σύμφωνα με το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,5)$τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή $1\le f'(x)\le 4$ δηλαδή $f'(x)>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα , άρα και $1-1$ συνεπώς το x_0 θα είναι μοναδικό. Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς μια φορά τον άξονα $x'x$ όταν $x\in(-1,5)$.

Γ₃. Αφού F αρχική της f θα είναι $F'(x)=f(x)$, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-1,5)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$και επειδή $1\le f'(x)\le 4$ δηλαδή $f'(x)>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα ,

για $x<x_0 \overset{f\ \text{γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0)\Leftrightarrow f(x)<0$ δηλαδή για $x<x_0\Leftrightarrow F'(x)<0$

άρα η F γνησίως φθίνουσα στο $[-1,x_0]$

για $x>x_0 \overset{f\ \text{γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$ δηλαδή για $x>x_0\Leftrightarrow F'(x)>0$

άρα η F γνησίως αύξουσα στο $[x_0,5]$.

Επομένως η συνάρτηση F παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

x	-1	x_0	5
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

O.E

Γ₄. i. Επειδή $1\le f'(x)\le 4$ δηλαδή $f'(x)>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως και $1-1$ άρα ορίζεται η f^{-1} .

ii. Ξέρουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} , επομένως έχουμε

$-1\le f^{-1}(x)\le 5\Leftrightarrow -3\le 3f^{-1}(x)\le 15\Leftrightarrow 1\le 4+3f^{-1}(x)\le 19$

και για $x>0$ έχουμε $\dfrac{1}{x^{2023}}\le\dfrac{4+3f^{-1}(x)}{x^{2023}}\le\dfrac{19}{x^{2023}}$ δηλαδή $\dfrac{4+3f^{-1}(x)}{x^{2023}}\ge\dfrac{1}{x^{2023}}$

είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2023}}=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4+3f^{-1}(x)}{x^{2023}}=+\infty$.

Γ₅. Η συνάρτηση f', ως παραγωγίσιμη στο $[-1,5]$ είναι και συνεχής στο $[-1,5]$, επίσης ισχύει ότι $1 \le f'(x) \le 4$ για κάθε $x \in (-1,5)$,

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta \in (-1,5)$ τέτοιοι ώστε

$f'(\alpha) = 1$ και $f'(\beta) = 4$.

Αν $\alpha < \beta$

Τότε είναι $f'(\alpha) = 1 < 2 < f'(\beta) = 4$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα υπάρχει

$x_1 \in (\alpha\,,\,\beta) \subseteq (-1,5)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 2$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, \beta]$ και είναι $f'(x_1) = 2 < 3 < f'(\beta) = 4$

άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα υπάρχει $x_2 \in (x_1, \beta) \subseteq (-1,5)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 3$

άρα για $-1 < \alpha < x_1 < x_2 < \beta < 5$ δηλαδή για $x_1 \ne x_2$

είναι $(f'(x_1))^3 \cdot (f'(x_2))^2 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

Αν $\beta < \alpha$

Τότε είναι $f'(\alpha) = 1 < 2 < f'(\beta) = 4$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα υπάρχει

$x_1 \in (\beta\,,\,\alpha) \subseteq (-1,5)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 2$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\beta, x_1]$ και είναι $f'(x_1) = 2 < 3 < f'(\beta) = 4$

άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα υπάρχει $x_2 \in (\beta\,,\,x_1) \subseteq (-1,5)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 3$.

άρα για $-1 < \beta < x_2 < x_1 < \alpha < 5$ δηλαδή για $x_1 \ne x_2$

είναι $(f'(x_1))^3 \cdot (f'(x_2))^2 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. $\int_0^1 [f(x)+f(t)]\,dt = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dt + \int_0^1 f(t)dt = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 \Leftrightarrow$

$f(x)[t]_0^1 + \int_0^1 f(t)dt = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 \Leftrightarrow$

$f(x)(1-0) + \int_0^1 f(t)dt = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 \Leftrightarrow$

$f(x) + \int_0^1 f(t)dt = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 \quad (1)$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t)dt$ είναι σταθερός αριθμός οπότε θέτουμε $\alpha = \int_0^1 f(t)dt$ τότε από την (1) έχουμε:

$f(x) + \alpha = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 - \alpha \quad (2)$

Η f επαληθεύει την (1) επομένως έχουμε

$e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 - \alpha + \int_0^1 (e^t + 3t^2 + 2t + e + 1 - \alpha)dt = e^x + 3x^2 + 2x + e + 1 \Leftrightarrow$

$-\alpha + \left[e^t + t^3 + t^2 + (e+1-\alpha)t\right]_0^1 = 0 \Leftrightarrow -\alpha + (e+1+1+e+1-\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow$

$-\alpha + 2e + 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 2e + 2 \Leftrightarrow \alpha = e + 1$

Επομένως από την (2) προκύπτει $f(x) = e^x + 3x^2 + 2x$.

Δ₂. **i.** Έχουμε $f(x) = e^x + 3x^2 + 2x$, $f'(x) = e^x + 6x + 2$, $f''(x) = e^x + 6$.

Η $f'(x) = e^x + 6x + 2$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$

$f'(-1) = e^{-1} - 6 + 2 = \dfrac{1}{e} - 4 = \dfrac{1-4e}{e} < 0$

$f'(0) = e^0 + 2 = 3 > 0$

Επομένως $f'(-1)f'(0) < 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Επειδή $f''(x) = e^x + 6 > 0$ η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνεπώς και "$1-1$" άρα η $f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα το x_0.

Δηλαδή η γραφική παράσταση της παραγώγου της f τέμνει ακριβώς μια φορά τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1,0)$.

ii. Επειδή η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

Για $x < x_0 \overset{f' \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για $x > x_0 \overset{f' \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

O.E

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, x_0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Για $x = 0$ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο το $f(x_0)$.

Επομένως ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq e^{x_0} + 3x_0^2 + 2x_0 \geq x_0 + 1 + 3x_0^2 + 2x_0$ δηλαδή

$f(x) \geq 3x_0^2 + 3x_0 + 1 > 0$ γιατί $3x^2 + 3x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού έχει $\Delta < 0$.

(Είναι $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

Δ₃. Επειδή $-1 < x_0 < 0$ θα είναι $x_0 + 1 > 0$ και $x_0 - 1 < 0$ άρα

$(x_0 + 1)(x_0 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 < 0$ έχουμε

- $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{x^2 - 1}{f'(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \left[\frac{1}{f'(x)} (x^2 - 1) \right] = +\infty$$

Γιατί

$\lim\limits_{x \to x_0^-} (x^2 - 1) = x_0^2 - 1 < 0$ και

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = 0$ και $f'(x) < 0$ για $x < x_0$.

- $$\lim_{x\to x_0^+}\frac{x^2-1}{f'(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\left[\frac{1}{f'(x)}(x^2-1)\right]=-\infty$$

Γιατί

$\lim_{x\to x_0^+}(x^2-1)=x_0^2-1<0$ και

$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f'(x)}=+\infty$ αφού $\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=0$ και $f'(x)>0$ για $x>x_0$.

Επειδή $\lim_{x\to x_0^-}\frac{x^2-1}{f'(x)}\neq\lim_{x\to x_0^+}\frac{x^2-1}{f'(x)}$

συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-1}{f'(x)}$.

Δ4. Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει:

Αν $g(1)<g(2)$ τότε $\int_{g(1)}^{g(2)}f(x)dx>0$, Άτοπο γιατί $\int_{g(1)}^{g(2)}f(x)dx=0$

Αν $g(1)>g(2)$ τότε $\int_{g(1)}^{g(2)}f(x)dx=-\int_{g(2)}^{g(1)}f(x)dx<0$, Άτοπο γιατί $\int_{g(1)}^{g(2)}f(x)dx=0$

Άρα $g(1)=g(2)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]\subseteq\mathbb{R}$ και

$g(1)=g(2)$ άρα σύμφωνα με το Θ.Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$

Τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$.

Επομένως η γραφική παράσταση της g έχει μια τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.