# ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
# ΒΑΣΙΣΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄



**1.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Αν $f, g$ δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε υποχρεωτικά ισχύει $g \circ f = f \circ g$».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**Απάντηση :**

**α.** **Ψ**

**β.** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$ .

Η συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$, ενώ η $g$ το $D_g = [0, +\infty)$ .

Για να ορίζεται η παράσταση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ πρέπει : $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ ή , ισοδύναμα,

$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$, δηλαδή πρέπει $x \geq 1$. Επομένως, ορίζεται η $g \circ f$ και είναι : $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}$, $D_{g \circ f} = [1, +\infty)$

Για να ορίζεται η παράσταση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει : $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ ή, ισοδύναμα,

$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$, δηλαδή πρέπει $x > 0$. Επομένως, ορίζεται η $f \circ g$ και είναι : $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}$, $D_{f \circ g} = (0, +\infty)$ . Τελικά παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$ .

**2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Έστω $f, g, h$ τρεις συναρτήσεις. Αν ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $h \circ (g \circ f) = (g \circ f) \circ h$».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**Απάντηση :**

**α. Ψ**

**β.** Είναι ψευδής καθώς στην σύνθεση δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα όπως εξηγήθηκε στο **1.** αλλά η προσεταιριστική ιδιότητα $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Α και “1-1” τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Α».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

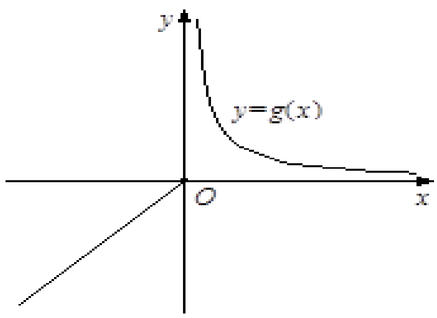
**Απάντηση :**

**α. Ψ**

**β.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι “1-1” αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



**4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $x_0$ τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**<u>Απάντηση :</u>**

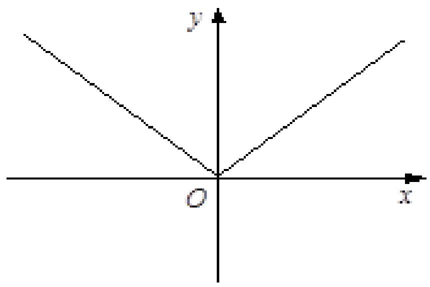
**α. Ψ**

**β.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \text{ ενώ,}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση *f* μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.




**5.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta=(-\infty, x_0)\cup(x_0, +\infty)$ με:

- συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**Απάντηση :**

**α. Ψ**

**β.** Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει όταν η f είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-1\,,\ x<0\\ \ \ 1\,,\ x>0\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η *f* δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ .

**6.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

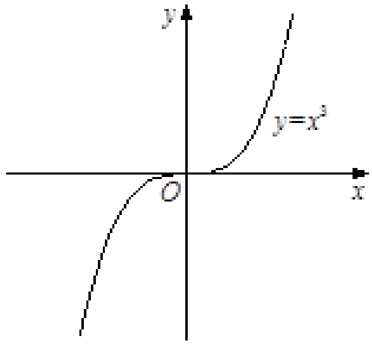
**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**Απάντηση :**

**α. Ψ**

**β.** Αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$ .



**7.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο».

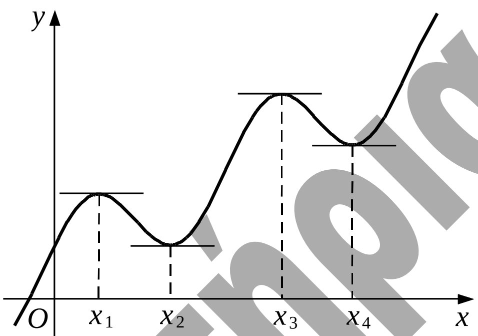
**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**Απάντηση :**

**α. Ψ**

**β.** Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι το τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1$ είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_4$.




( α )

**8.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το μέγιστο αυτής».

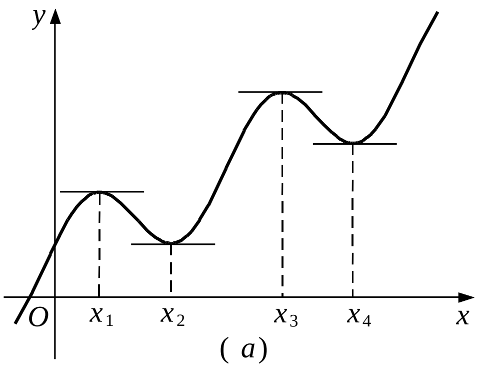
**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**Απάντηση :**

**α. Ψ**

**β.** Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Αυτό επιβεβαιώνεται στο παρακάτω σχήμα από το οποίο παρατηρούμε ότι στη θέση $x_3$, αν και έχουμε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, δεν είναι το μέγιστο της συνάρτησης αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.




**9.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Re$, αν για κάποιο $x_0 \in \Re$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε το $x_0$ είναι υποχρεωτικά θέση τοπικού ακρότατου της f».

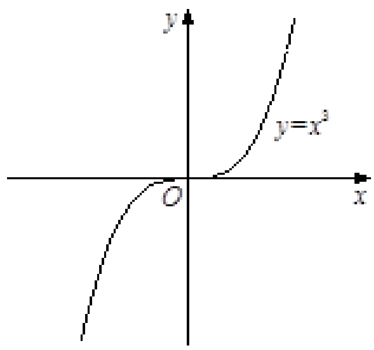
**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**<u>Απάντηση :</u>**

**α. Ψ**

**β.** Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$. Η ρίζα της παραγώγου είναι το 0, δηλαδή $f'(0) = 0$. Εντούτοις, όπως φαίνεται στο σχήμα το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.



**10.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Για κάθε συνάρτηση f κυρτή στο Δ ισχύει $f''(x_0) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

**<u>Απάντηση :</u>**

**α. Ψ**

**β.** Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\Re$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\Re$, αφού $f''(0)=0$.