ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ Γ ΕΠΑΛ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2023

Θέμα 1 (25 μονάδες).

1. Να αποδείξετε ότι (6 μονάδες):

$$(x)' = 1.$$

2. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (10 μονάδες):

   (α′) Το ραβδόγραμμα (barchart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποσοτικής μεταβλητής.

   (β′) Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ τότε $f'(g(x)) = f'(x)g'(x)$.

   (γ′) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές.

   (δ′) Η ομάδα αίματος των ατόμων ενός δείγματος αποτελεί διακριτή ποσοτική μεταβλητή.

   (ε′) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος είναι η επιτάχυνσή του.

3. Ποιες μεταβλητές ονομάζουμε **ποσοτικές** και σε ποιες κατηγορίες τις διακρίνουμε; Να δώσετε από τρία παραδείγματα για κάθε κατηγορία που θα γράψετε. (6 μονάδες)

4. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας (3 μονάδες):

   «Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(4) = 0$ τότε η f παρουσιάζει στο 4 τοπικό ακρότατο».

Θέμα 2 (25 μονάδες). Για ένα δείγμα ν παρατηρήσεων δίνεται ο παρακάτω πίνακας καθώς και το γεγονός ότι η πρώτη και η τρίτη κλάση έχουν το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων:

$[\alpha_i, \beta_i)$	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
[,)							
[,)	-2	15					
[0,)					37		
[,)			0.16				90
[,)							
Σύνολο	–				–	–	–

1. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα. (10 μονάδες)
2. Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα. (6 μονάδες)
3. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του -2. (6 μονάδες)
4. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του -2 και μικρότερες του 9. (3 μονάδες)

Θέμα 3 (25 μονάδες). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (7 μονάδες)
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$. (5 μονάδες)

3. Να υπολογίσετε το όριο (7 μονάδες):

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-2x+1}.$$

4. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης. (6 μονάδες)

Θέμα 4 (25 μονάδες). Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\lambda x + \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Για $\lambda = -\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα (7 μονάδες) και να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{5}{9}\right)$ και $f\left(\frac{2}{3}\right)$ (3 μονάδες).

2. Για $\lambda = 0$ να υπολογίσετε το όριο (8 μονάδες):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}f(x)-f(x)}{f'(x)}.$$

3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f παρουσιάζει τοπικά ή ολικά ακρότατα. (7 μονάδες)

Ενδεικτικές απαντήσεις

Θέμα 1. 1. Σ.Β., σελ. 28.

2. (α΄) Λάθος

   (β΄) Λάθος

   (γ΄) Λάθος

   (δ΄) Λάθος

   (ε΄) Σωστό

3. Σ.Β., σελ. 58-59.

4. Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Ως αντιπαράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-4)^3$ η οποία έχει παράγωγο:

$$f'(x) = \left((x-4)^3\right)' = 3(x-4)^2 \geq 0$$

με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και **δεν παρουσιάζει ακρότατα**.

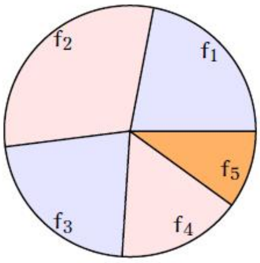
Θέμα 2. 1. Ο πίνακας συμπληρωμένος έχει ως εξής:

$[\alpha_i, \beta_i)$	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
$[-8,-4)$	-6	11	0.22	22	11	0.22	22
$[-4,0)$	-2	15	0.30	30	26	0.52	52
$[0,4)$	2	11	0.22	22	37	0.74	74
$[4,8)$	6	8	0.16	16	45	0.90	90
$[8,12)$	10	5	0.10	10	50	1.00	100
Σύνολο	–	50	1.00	100	–	–	–

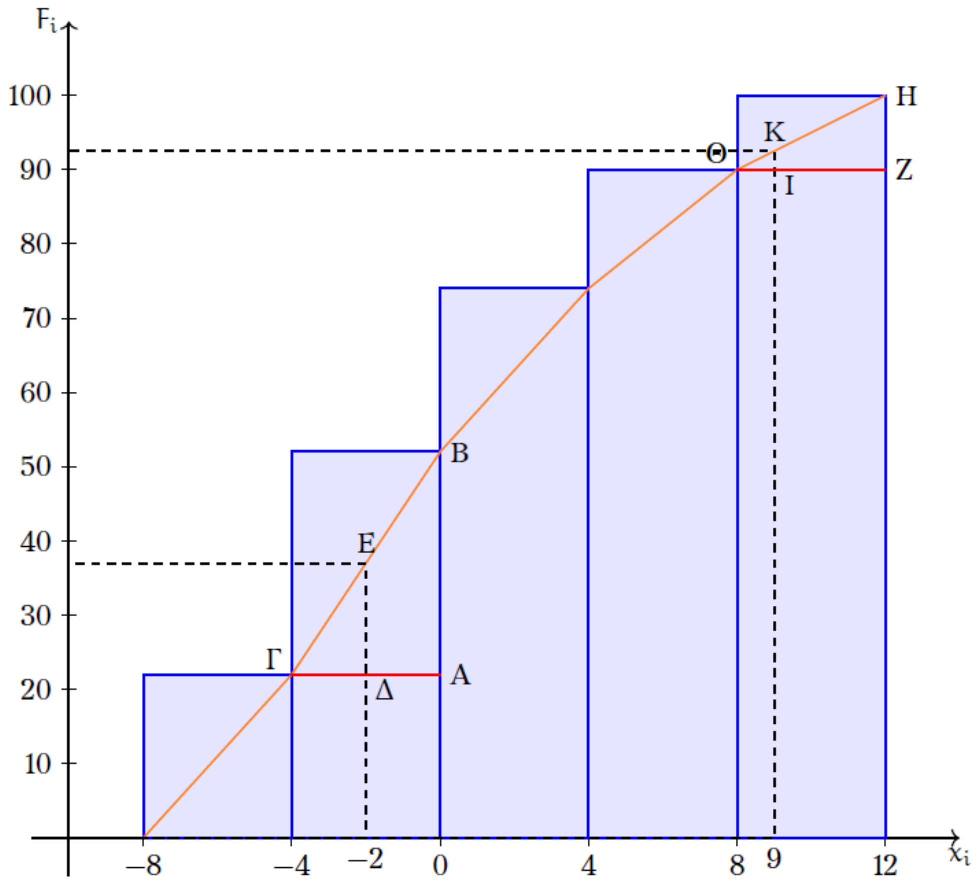
2. Για τις γωνίες του κυκλικού διαγράμματος έχουμε:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1 360^\circ = 0.22 \cdot 360^\circ = 79.2^\circ \\ a_2 &= f_2 360^\circ = 0.30 \cdot 360^\circ = 108^\circ \\ a_3 &= f_3 360^\circ = 0.22 \cdot 360^\circ = 79.2^\circ \\ a_4 &= f_4 360^\circ = 0.16 \cdot 360^\circ = 57.6^\circ \\ a_5 &= f_5 360^\circ = 0.10 \cdot 360^\circ = 36^\circ \end{aligned}$$

Τώρα, το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 1



Σχήμα 1: Το κυκλικό διάγραμμα.



Σχήμα 2: Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.

3. Θα χρειαστούμε το ιστόγραμμα Και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων το οποίο φαίνεται στο σχήμα 2

   Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι όμοια, επομένως:

$$\frac{\Delta E}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{2} = \frac{30}{4} \Leftrightarrow \Delta E = 15.$$

   Επομένως, το ποσοστό που ψάχνουμε είναι:

$$100 - (22 + 15) = 100 - 37 = 63\%.$$

4. Αναλόγως, τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΘΙΚ είναι όμοια, επομένως:

$$\frac{KI}{I\Theta} = \frac{HZ}{\Theta Z} \Leftrightarrow \frac{KI}{1} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow KI = 2.5.$$

   Συνεπώς, μέχρι το 9 έχουμε το $90 + 2.5 = 92.5\%$ των παρατηρήσεων. Άρα από το -2 μέχρι το 9 έχουμε το:

$$92.5 - 37 = 55.5\% \text{ των παρατηρήσεων.}$$

Θέμα 3. 1. Αρχικά, η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(x^3 + 4x^2 - 11x + 6\right)' = 3x^2 + 8x - 11.$$

Τώρα, λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 11 = 0 \xLeftrightarrow{\Delta=196>0} x = 1 \text{ ή } x = -\frac{11}{3}.$$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		$-11/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Επομένως, η f:

- γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -11/3]$ και $[1, +\infty)$,
- γνησίως φθίνουσα στο $[-11/3, 1]$,
- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $-11/3$, το $f(-11/3) = \frac{1372}{27}$,
- παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 1, το $f(1) = 0$.

2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta,$$

όπου $\lambda = f'(2)$. Έχουμε, λοιπόν:

$$\lambda = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 11 = 17.$$

Τώρα, αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(2, f(2))$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση $x = 2$ και $y = f(2)$, δηλαδή $y = 8$, επομένως:

$$8 = 17 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 8 - 34 \Leftrightarrow \beta = -26.$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση:

$$y = 17x - 26.$$

3. Για το όριο έχουμε, για $x \neq 1$:

$$\frac{f(x)}{x^2-2x+1} = \frac{x^3+4x^2-11x+6}{(x-1)^2}.$$

Τώρα χρειάζεται να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή με σχήμα Horner:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -11 & 6 & \\ & 1 & 5 & -6 & \rho = 1 \\ \hline 1 & 5 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

Άρα:

$$x^3+4x^2-11x+6 = (x-1)(x^2+5x-6).$$

Αντικαθιστούμε παραπάνω:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x^2-2x+1} &= \frac{x^3+4x^2-11x+6}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+5x-6)}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \\ &= \frac{x^2+5x-6}{x-1}. \end{aligned}$$

Εδώ θα χρειαστεί να παραγοντοποιήσουμε ξανά τον αριθμητή. Έχουμε:

$$\Delta = 25 + 24 = 49 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 1 \text{ ή } -6,$$

επομένως:

$$x^2+5x-6 = (x-1)(x+6).$$

Συνεπώς:

$$\frac{f(x)}{x^2-2x+1} = \frac{x^2+5x-6}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+6)}{\cancel{x-1}} = x+6.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1}(x+6) = \mathbf{7}.$$

4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε ένα σημείο x είναι η $f'(x)$. Επομένως, μας ζητείται να βρούμε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η παράγωγος, $f'(x)$, είναι ελάχιστη. Πιο απλά, πρέπει να βρούμε το (ολικό) ελάχιστο της $f'(x)$.

   Η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = \left(3x^2+8x-11\right)' = 6x+8.$$

   Τώρα, έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x+8 = 0 \Leftrightarrow 6x = -8 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

   Επίσης:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x+8 > 0 \Leftrightarrow 6x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{8} \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}.$$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		$-4/3$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Επομένως, η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $M(-4/3, f'(-4/3))$ δηλαδή στο $M(-4/3, -49/3)$.

Θέμα 4. 1. Για $\lambda = -1/2$ έχουμε:

$$f(x) = -x + \frac{x}{x^2+1}.$$

Τώρα, η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(-x + \frac{x}{x^2+1}\right)' = \\
&= (-x)' + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \\
&= -1 + \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\
&= -1 + \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \\
&= -1 + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \\
&= -1 + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{-(x^2+1)^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{-(x^4+2x^2+1)+1-x^2}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{-x^4-2x^2-1+1-x^2}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{-x^4-3x^2}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{-x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Λύνουμε τώρα την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2(x^2+3) = 0 \xLeftrightarrow{x^2+3>0} -x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} > 0 \xLeftrightarrow[x^2+3>0]{(x^2+1)^2>0} -x^2 > 0,$$

που είναι αδύνατο, διότι $-x^2 \leq 0$. Συνεπώς, $f'(x) \leq 0$. Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$			$\searrow$		

Συνεπώς, επειδή η f' είναι αρνητική πλην ενός σημείου είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Για να συγκρίνουμε τις τιμές $f\left(5/9\right)$ και $f\left(2/3\right)$ συγκρίνουμε πρώτα τα $5/9$ και $2/3$:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} > \frac{5}{9},$$

επομένως:

$$\frac{2}{3} > \frac{5}{9} \xRightarrow{\text{f: γν. φθ.}} f(2/3) < f(5/9).$$

2. Για $\lambda = 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \\ &= \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Τώρα, για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}f(x) - f(x)}{f'(x)} &= \frac{f(x)\left(\sqrt{x}-1\right)}{f'(x)} = \\ &= \frac{\frac{x}{x^2+1}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}} = \\ &= \frac{x(x^2+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-x^2} = \\ &= \frac{x(x^2+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(1-x)(1+x)} = \\ &= \frac{x(x^2+1)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(1-x)(1+x)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \\ &= \frac{x(x^2+1)\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)}{(1-x)(1+x)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \\ &= \frac{x(x^2+1)(x-1)}{-(x-1)(1+x)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{x(x^2+1)}{-(1+x)\left(\sqrt{x}+1\right)}.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}f(x)-f(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+1)}{-(1+x)\left(\sqrt{x}+1\right)} = -\frac{1}{2}.$$

3. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2\lambda x + \frac{x}{x^2+1}\right)' = \\ &= 2\lambda + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Για να εξετάσουμε πότε η f' παρουσιάζει ακρότατα, πρέπει να μελετήσουμε την f' ως προς το πρόσημο. Σε αυτό θα μας βοηθήσει η εξής συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

και τη μελετούμε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \\ &= \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2-(1-x^2)\left((x^2+1)^2\right)'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2+1)^2-2(1-x^2)(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2+1)^2-4x(1-x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2+1)\left(x^2+1+2(1-x^2)\right)}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-2x\left(x^2+1+2-2x^2\right)}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{-2x\left(3-x^2\right)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \text{ ή } 3-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm\sqrt{3}.$$

Επίσης:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$3-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	T.E.	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$	

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$g(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \overset{x^2+1\geq 1}{\leq} 1 - x^2 \overset{x^2\geq 0}{\leq} 1 = g(0),$$

συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0, το $g(0) = 1$. Επίσης, η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα $\pm\sqrt{3}$ το:

$$g\left(\pm\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{8},$$

συνεπώς για $-1/8 < -2\lambda < 1 \Leftrightarrow 1/16 > \lambda > -1/2$ η f παρουσιάζει ακρότατα.

<u>**Επιμέλεια θεμάτων**</u>

Καρακώστα Νάσια

Κριμπάς Θεόδωρος