<u>**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΦ'ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ**</u>

<u>**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ**</u>

<u>Θέμα Α</u>

Α1.Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x}\,)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. *Μονάδες 7*

Α2.Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά . *Μονάδες 4*

Α3.Ποιές είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα ; *Μονάδες 4*

Α4.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής. *Μονάδες 1*

β) Με την βοήθεια συνάρτησης που ικανοποιεί την υπόθεση του ισχυρισμού, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α) . *Μονάδες 3*

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ δεν έχει ασύμπτωτη στο $\mathbb{R}$.

β) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in A \cap B$. *Μονάδες 6*

<u>Θέμα Β</u>

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f τρίτου βαθμού για την οποία ισχύουν :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^{\nu}}\right) = 1, \nu \in \mathbb{N}$
- f περιττή
- $\int_{-1}^{1} f'(2x)dx = 14$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 8*

Β2. Να μελετήσετε και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . *Μονάδες 5*

Β3. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f σε αντίθετες τετμημένες είναι παράλληλες . *Μονάδες 5*

Β4. Να αποδείξετε ότι τα χωρία Ω_1 και Ω_2 είναι ισεμβαδικά , όπου Ω_1 είναι το χωρίο που περικλείεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-x_1, f(-x_1)), x_1 > 0$ της C_f, τον αρνητικό ημιάξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 0$ ενώ Ω_2 είναι αντίστοιχα το χωρίο που περικλείεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(x_1, f(x_1)), x_1 > 0$ της C_f, τον θετικό ημιάξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 0$. *Μονάδες 7*

<u>Θέμα Γ</u>

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι: $(f')^2(x) - e^{2x^2} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 1 = f(1)$ και $f(0) = 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 4*

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)dx < \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x = 1$. *Μονάδες 5*

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$. *Μονάδες 4*

Γ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2020^{2021}$ έχει ακριβώς μία ρίζα. *Μονάδες 4*

Γ6. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu(\xi - 1) \cdot f(\xi) + \eta\mu(\xi - 1) \cdot f'(\xi) = 1 - 2\xi$. *Μονάδες 4*

<u>Θέμα Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 6)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν $g(1) + 2xg(x) - g(x+1) - (f(x) - 6)^2 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(1+2h) - g(1-h)}{h} = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g'(1) = 0$ *Μονάδες 5*

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x \to -\infty$ *Μονάδες 3*

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f *Μονάδες 3*

Δ4. Να βρείτε σημείο Α της C_h με $h(x) = \sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο Β(1,0) να απέχει την ελάχιστη απόσταση από την C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h στο Α είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ. *Μονάδες 7*

Δ5. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\int_{g(0)}^{g(a)} f(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, a)$: $g'(x_0) = \varepsilon\varphi x_0 \cdot g(x_0)$

Μονάδες 7