Διαγώνισμα Γ΄ Λυκείου ΕΠΑΛ

Απαντήσεις

Α. ΘΕΜΑ

Α.1) Σχολικό βιβλίο σελ: 31

Α.2) Σχολικό βιβλίο σελ: 13

Α.3)

i. Σωστή
ii. Λάθος
iii. Λάθος
iv. Λάθος
v. Λάθος

Β. ΘΕΜΑ

Β.1) Πρέπει $x^2-4\neq 0 \iff x^2\neq 4 \iff \{x\neq 2$ και $x\neq -2\} \iff$

$\iff \mathrm{A}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Β.2) $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot(x-2)] = \lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{x^3+2x}{x^2-4}\cdot(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{x(x^2+2)}{(x-2)(x+2)}\cdot(x-2)\right] =$

$\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{x(x^2+2)}{x+2}\right] = \frac{2\cdot(2^2+2)}{2+2} = \frac{2\cdot(4+2)}{4} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Β.3) $f'(x) = \left(\frac{x^3+2x}{x^2-4}\right)' = \frac{(x^3+2x)'\cdot(x^2-4)-(x^3+2x)\cdot(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} =$

$\frac{(3x^2+2)\cdot(x^2-4)-(x^3+2x)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{(3x^4-12x^2+2x^2-8)-(2x^4+4x^2)}{(x^2-4)^2} =$

$\frac{3x^4-10x^2-8-2x^4-4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-14x^2-8}{(x^2-4)^2}$

Β.4) Έχουμε: $f(1) = \frac{1^3+2\cdot 1}{1^2-4} = \frac{1+2}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$ και

$$f'(1) = \frac{1^4-14\cdot 1^2-8}{(1^2-4)^2} = \frac{1-14-8}{(1-4)^2} = \frac{-21}{(-3)^2} = \frac{-21}{9}$$

$Έστω\ (\varepsilon) : y = a \cdot x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένη της C_f στο σημείο της

Α(1, -1) με α = $f^{'}(1) = \frac{-21}{9}$, οπότε y = $\frac{-21}{9}$ ·x + β

Α(1, -1) ∈ (ε) : -1 = $\frac{-21}{9}$ ·1 + β ⇔ -1 + $\frac{21}{9}$ ·1 = β ⇔ $-\frac{9}{9} + \frac{21}{9} = \beta \Leftrightarrow \frac{12}{9} = \beta \Leftrightarrow$ $\beta = \frac{4}{3}$

$$(\varepsilon) : y = \frac{-21}{9} \cdot x + \frac{4}{3}$$

Γ. ΘΕΜΑ

Γ.1) Γνωρίζουμε από το διάγραμμα (x_i, v_i) ότι: $\nu_1 = 4,\ \nu_2 = 8,\ \nu_3 = 6,\ \nu_4 = 2$, οπότε:

$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = \nu \Leftrightarrow 4 + 8 + 6 + 2 = \nu \Leftrightarrow \nu = 20$

Γ.2) Έχω λοιπόν: $f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu}$, $i = 1,2,3,4$.

Άρα: $f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{4}{20} = 0{,}2$, $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{8}{20} = 0{,}4$, $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{6}{20} = 0{,}3$,

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{2}{20} = 0{,}1$.

Στην τέταρτη στήλη από τον ορισμό της Αθροιστικής συχνότητας παίρνω:

N_1= v_1= 4, N_2= N_1+v_2= 4+8 =12, N_3= N_2+v_3= 12+ 6= 18,

N_4= N_3+v_4= 18+ 2= 20

Στην επόμενη στήλη από τον ορισμό της Αθροιστικής σχετικής συχνότητας παίρνω:

F_1= f_1= 0,2, F_2= F_1+f_2= 0,2+0,4=0,6, F_3= F_2+f_3= 0,6+0,3= 0,9,

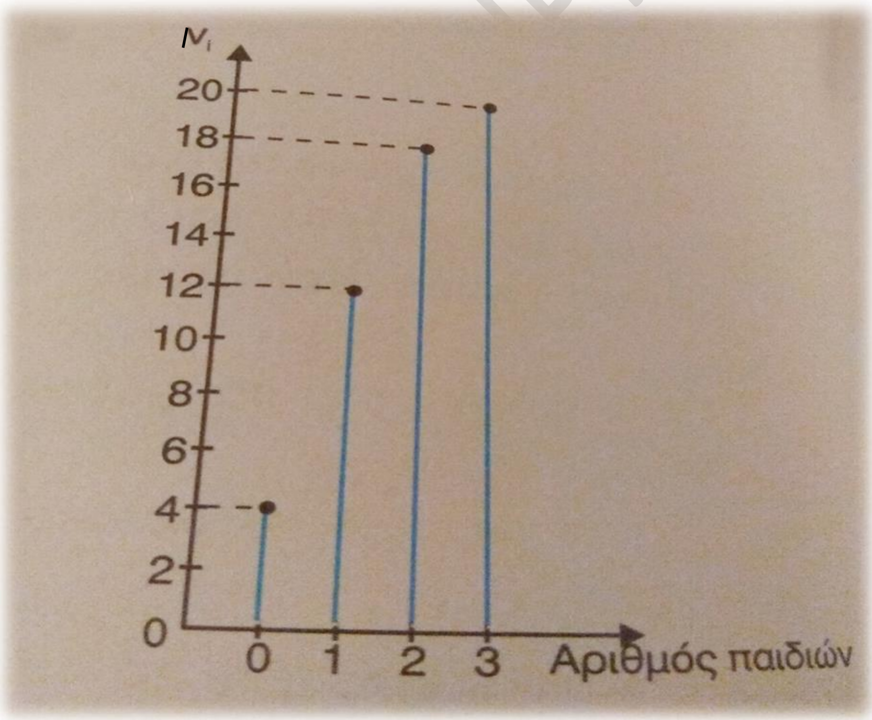
F_4= F_3+f_4= 0,9+0,1= 1

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
0	4	0,2	4	0,2
1	8	0,4	12	0,6
2	6	0,3	18	0,9
3	2	0,1	20	1
Σύνολο	20	1	-	-

Γ.3) Το ποσοστό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά είναι:

$\mathrm{f}_3\% + \mathrm{f}_4\% = 30 + 10 = 40\%$, όπου $\mathrm{f}_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 100 = \frac{6}{20} \cdot 100 = 0{,}3 \cdot 100 = 30$, $\mathrm{f}_4\% = \frac{\nu_4}{\nu} \cdot 100 = \frac{2}{20} \cdot 100 = 0{,}1 \cdot 100 = 10$.

Γ.4) Διάγραμμα (x_i , N_i)



Δ. ΘΕΜΑ

Δ.1) Είναι $f'(x) = 3\alpha \cdot x^2 + 2\beta \cdot x - 9\,,\ x \in \mathbb{R}$. Επειδή εφάπτονται θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(x_0) = y \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = -2\cdot(-1)+14 \\ f'(-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot (-1)^3 + \beta \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 10 = 2 + 14 \\ 3\alpha \cdot (-1)^2 + 2\beta \cdot (-1) - 9 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + 9 + 10 = 2 + 14 \\ 3\alpha \cdot 1 - 2\beta = -2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 16 - 19 \\ 3\alpha - 2\beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = -3 \\ 3\alpha - 2\beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 + \alpha \\ 3\alpha - 2 \cdot (-3 + \alpha) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = -3 + \alpha \\ 3\alpha + 6 - 2\alpha = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 + 1 \\ \alpha = 7 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Δ.2) Για α= 1 και β= - 2 έχουμε: $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 10$ και

$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 9\,,\ x \in \mathbb{R}$. Οπότε παίρνω $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 9 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9) = 16 + 108 = 124 > 0$ και

$$x_{1,2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{124}}{2\cdot 3} = \frac{4\pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{2\cdot(2\pm\sqrt{31})}{6} = \frac{2\pm\sqrt{31}}{3} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{2+\sqrt{31}}{3} \\ x_2 = \frac{2-\sqrt{31}}{3} \end{array} \right.$$

Έχουμε 25 < 31 < 36 οπότε $\sqrt{25} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$ δηλαδή 5 < $\sqrt{31}$ < 6. Άρα

Χ	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{31}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{31}}{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{31}}{3}\right]$ και $\left[\frac{2+\sqrt{31}}{3}, +\infty\right)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\frac{2-\sqrt{31}}{3}, \frac{2+\sqrt{31}}{3}\right]$.

Έχω ότι: $\frac{2-\sqrt{31}}{3} < 0 < \frac{\sqrt{31}}{3} < \frac{2+\sqrt{31}}{3}$ και 0, $\frac{\sqrt{31}}{3} \in [\frac{2-\sqrt{31}}{3}, \frac{2+\sqrt{31}}{3}]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό και συνεπώς

$f(0) > f(\frac{\sqrt{31}}{3})$.

Δ.3) Βρίσκω $f''(x) = 6\cdot x - 4 = 2\cdot(3\cdot x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(3\cdot x - 2) = 0 \Leftrightarrow 3\cdot x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\cdot x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Χ	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	
f'(x)		↘		↗	

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x είναι $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\cdot(\frac{2}{3})^2 - 4\cdot\frac{2}{3} - 9 = 3\cdot\frac{4}{9} - \frac{8}{3} - 9 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 9 = -\frac{4}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{31}{3}$

Δ.4) Είναι $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 10 = 1 - 2 - 9 + 10 = 0$.

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

1	-2	-9	10	ρ=1
↓	1	-1	-10	
1	-1	-10	$\boxed{0}$	

$x^3 - 2\cdot x^2 - 9\cdot x + 10 = (x-1)(x^2 - x - 10)$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2 - x - 10)}{x\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - x - 10}{x} =$$

$$\frac{1^2 - 1 - 10}{1} = \frac{1-11}{1} = 1 - 11 = -10 .$$

Επιμέλεια απαντήσεων: Αναστασίου Ιωάννα